# $S^3$判定のAlgorithmについて (多様体の低余次元位置問題について)



本間, 龍雄

数理解析研究所講究録
243巻 1975年 30-41



# $S^3$ 判定の Algorithm について

東工大 理学部　本間龍雄

## §1. Introduction

3次元閉多様体$M^3$が与えられたときに、$M^3$が3次元球面$S^3$であるかどうかを判定する一般的な algorithm は未だ知られていない。Poincare は最初 homology 群により判定できるだろうと予想したが，反例が存在するのでこの予想は否定された。続いて Poincare は「homotopy 群が$S^3$の homotopy 群と同型な3次元閉多様体$M^3$は，$S^3$である」という有名な Poincare の予想をたてたが，これはもちろん未解決である。

たとえ Poincare 予想が解決したとしても，$S^3$判定の algorithm が決定できるとは限らない。Poincare 予想が否定された場合は勿論であるが，肯定された場合でも，生成元と関係で表示された群が trivial であるかないかを判定する一般的 algorithm が存在しない以上何とも言えない。

しかし Poincare 予想が肯定的に解決された場合は同時に $S^3$ 判定の algorithm も完成される可能性は強い。

この稿で Heegaard 分解（すなわち単体分割）を用いて判定の algorithm を作ることを試みる。正確に言うと与えられた Heegaard 分解から，irreducible な Heegaard 分解を作る algorithm である。Heegaard 分解が irreducible であるという概念は §4 で定義するが，$M^3$ が irreducible であるとは異なる概念である。「$S^3$ の irreducible な Heegaard 分解は標準形に限る」ことが予想されるので，この予想が正しければ，$S^3$ 判定の algorithm となる。genus 2 の場合はこの予想は肯定的に証明されるので，genus 2 の Heegaard 分解に対しては $S^3$ 判定の algorithm となる。しかし genus 2 の場合は Birman - Hilden[2]，高橋元雄[3]，Haken[1] の結果によっても algorithm の存在は保証されている。

$M^3$ が orientable であるかないかは簡単に判定できるので $M^3$ は orientable であると初めから仮定しておく。

## §2 Heegaard 分解の genus を減らす algorithm

$M^3$ は genus $n$ の Heegaard 分解 $M^3 = M_1 \cup M_2$ をもつものとする。すなわち $M_1$，$M_2$ は genus $n$ の solid torus で

$$\partial M_1 = \partial M_2 = M_1 \cap M_2$$

を満足するものとする。

$\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$, $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ をそれぞれ $M_1$ と $M_2$ の <u>meridian disc の系</u>とする。すなわち

$$C_i \cap \partial M_1 = \partial C_i,\ D_i \cap \partial M_2 = \partial D_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$C_i \cap C_j = D_i \cap D_j = \phi \qquad i \neq j.$$

であって, $M_1 - (C_1 \cup \cdots \cup C_n)$, $M_2 - (D_1 \cup \cdots \cup D_n)$ は連結である。

$$M_1 \cap M_2 = \underline{N}, \quad \partial C_i = \underline{A_i}, \quad \partial D_i = \underline{B_i}$$

と書く。$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ はそれぞれ $M_1$, $M_2$ の <u>meridian 系</u>となる。二つの <u>meridian 系の交わり</u> $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ は常に<u>有限個の点</u>として差支えない。

Heegaard 分解を $T = \{N \mid A_1, \cdots, A_n; B_1, \cdots, B_n\}$ と書くことにする。$A_i$ と $B_i$ が一点で交わり, $i = 1, \cdots, n$, $A_i \cap B_j = \phi$, $i \neq j$ であるとき, $T$ は標準形であるという。$M^3$ が標準形の Heegaard 分解をもてば, $M^3$ はもちろん $S^3$ である。meridian 系の合併集合を

$$\underline{G(T)} = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n$$

と書き, Heegaard 分解 $T$ の genus を $\underline{n(T)}$, meridian 系の交わりの点の個数を $\underline{\#(T)}$ と書くことにする。

3次元球 $\underline{B^3}$ をとり，$B^3$の境界である2次元球面$\partial B^3$上に2n個の互いに交わらない2次元球 $\underline{C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{1n}, C_{21}, C_{22}, \cdots, C_{2n}}$ をとり，$B^3$ から $M_1$ の上への写像 $\underline{F_1 : B^3 \to M_1}$ をつぎのように作る。

a) $F_1 \mid B^3 - (C_{11} \cup \cdots \cup C_{1n} \cup C_{21} \cup \cdots \cup C_{2n})$ は $M - (C_1 \cup \cdots \cup C_n)$ 上への同相写像である。

b) $F_1 \mid C_{1i}$，$F_2 \mid C_{2i}$ は共に $C_i$ 上への同相写像である。$i = 1, 2, \cdots, n$。

同様に $\underline{F_2 : B^3 \to M_2}$ を定義する。

<u>定理1</u>. $F_1^{-1}(G(T))$（または$F_2^{-1}(G(T))$が連結でない場合，$M^3$に含まれる2次元球面$S^2$が存在し，$S^2 \cap M_1$, $S^2 \cap M_2$はそれぞれ$M_1$, $M_2$の<u>proper</u>な2次元球で，$S^2 \cap N$は$N$でhomotop 0でない1次元球面となり

$$S^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n) = \phi$$

を満足する。

<u>証明</u>　$F_1$の場合に証明する。条件 b)より

$$F_1(\partial C_{1i}) = F_1(\partial C_{2i}) = A_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

であるから，

$$F_1^{-1}(G(T)) = F_1^{-1}(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n)$$

$$= (\partial C_{11} \cup \cdots \cup \partial C_{1n} \cup \partial C_{21} \cup \cdots \cup \partial C_{2n}) \cup F_1^{-1}(B_1 \cup \cdots \cup B_n)$$

となる。$F_1^{-1}(G(\Gamma))$は2次元球面$\partial B^3$上の連結でない<u>graph</u>であるから，$\partial B^3$上に1次元球面$\tilde{S}$が存在して，

$$\tilde{S} \cap F_1^{-1}(G(\Gamma)) = \phi$$

で，$\tilde{S}$を境界とする$\partial B^3$の二つの領域は共に$F_1^{-1}(G(\Gamma))$と交わる。$C_{11}, \cdots, C_{1n}, C_{21}, \cdots, C_{2n}$は互いに交わらない2次元球であるから，

$$\tilde{S} \cap (C_{11} \cup \cdots \cup C_{1n} \cup C_{21} \cup \cdots \cup C_{2n}) = \phi$$

である。従って<u>$S^1$</u>$= F(\tilde{S})$とおくと，$S^1$は$N$の1次元球面で，$\tilde{S} \cap F^{-1}(G(\Gamma)) = \phi$より

$$S^1 \cap G(\Gamma) = \phi$$

である。$S^1$は$M_1$の*meridian*系$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$と交わらないから，$M_1$の*meridian disc*の系$\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$と交わらない$M_1$の*proper*な2次元球$C^2$が存在し，$\partial C^2 = S^1$となる。同様に$S^1$は$\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$と交わらないから，$\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$と交わらない$M_2$の*proper*な2次元球$D^2$が存在し，$\partial D^2 = S^1$となる。

$$S^2 = C^2 \cup D^2$$

とおくと，$S^2 \cap M_1 = C^2$, $S^2 \cap M_2 = D^2$であるからそれぞれ$M_1$, $M_2$の*proper*な2次元球である。

$$
\begin{aligned}
&S^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n) \\
&= (S^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n)) \cup (S^2 \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_n)) \\
&= (C^2 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_n)) \cup (D^2 \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_n)) \\
&= \phi
\end{aligned}
$$

また$\tilde{S}$を境界とする$\partial B^3$の二つの領域は共に$F_1^{-1}(G(\Gamma))$と交わるから，$S^1(=F(\tilde{S}))$が$N(=\partial M_1=\partial M_2)$においてhomotop 0（すなわち$N$の2次元球の境界）となることはない。

<u>証明終り</u>

<u>系1</u>　$G(\Gamma)$が連結でなければ，定理1の条件を満たす$S^2$が存在する。

<u>証明</u>　$G(\Gamma)$が連結でないから，$F^{-1}(G(\Gamma))$は連結でない。

定理1において，$S^1=S^2\cap N$は$N$でhomolog 0の場合と，homolog 0でない場合に分かれるが，$S^1$がhomolog 0でない場合は$M^3$は<u>2次元handle</u>をもつことになるから，次の系が成り立つ。

<u>系2</u>　定理1の条件のもとで，$S^1=S^2\cap N$が$N$でhomolog 0でないときは，$M^3$は2次元handleをもつ，従って$M^3$

は2次元球面と1次元球面の直積と3次元閉多様体の connected sum となる。故に $M^3$ は3次元球面でない。

$S^1$ が $N$ で homolog 0 でない場合は，つぎの系が成り立つ。

系3　定理1の条件のもとで，$S^1 (= S^2 \cap N)$ が $N$ で homolog 0 ならば，$S^2$ は $M^3$ で homolog 0 となり，Heegaard 分解は $S^2$ により二つの Heegaard 分解 $T_1$ と $T_2$ に分かれ

$$n(T_1),\ n(T_2) > 0$$
$$n(T) = n(T_1) + n(T_2)$$
$$\#(T) = \#(T_1) + \#(T_2)$$

を満足する。

故に $F_1^{-1}(G(T))$ または $F_2^{-1}(G(T))$ が連結でない場合は $S^3$ 判定の algorithm はもっと genus の低い場合に帰着できる。

## §3　meridian 系の交点数を減らす algorithm

前章で $F_1^{-1}(G(T))$, $F_2^{-1}(G(T))$ が連結でない場合は Heegaard 分解の genus を減らすことができることが判

明したので，この章では $F_1^{-1}(G(T))$, $F_2^{-1}(G(T))$ が共に連結であることを仮定する。

定理2　ある $i, j$, $i=1, 2$, $j=1, 2, \cdots, n$, が存在して，$F_1^{-1}(G(T))-\partial C_{ij}$ (または $F_2^{-1}(G(T))-\partial D_{ij}$) が連結でないならば，$M^3$ の Heegaard 分解 $\tilde{T}$ が存在して，

$$\#(\tilde{T}) < \#(T)$$
$$n(\tilde{T}) = n(T)$$

を満足する。

証明　$F_1^{-1}(G(T))-\partial C_{ij}$ が連結でない場合に証明する。$F_1^{-1}(G(T))$ は2次元球面 $\partial B^3$ から $2n$ 個の開2次元球 $\mathring{C}_{11}, \cdots, \mathring{C}_{1n}, \mathring{C}_{21}, \cdots, \mathring{C}_{2n}$ を除いた2次元多様体 $X$ に含まれていて，$\partial X = \partial C_{11} \cup \cdots \cup \partial C_{1n} \cup \partial C_{21} \cup \cdots \cup \partial C_{2n}$ である。$F_1^{-1}(G(T))$ は連結で，$F_1^{-1}(G(T))-\partial C_{ij}$ は連結でないのであるから，$X$ 上に proper な1次元球 $A$ が存在して，

$$A \cap \partial X = A \cap \partial C_{ij} = \partial A$$
$$A \cap F^{-1}(G(T)) = \partial A$$

を満足し，$A$ によって分けられる $X$ の二つの領域は共に，$F_1^{-1}(G(T))-\partial C_{ij}$ と交わる。

$\partial A = \underline{p \cup q}$ と書くことにする。$A_i$ は $M_1$ の meridian だから，$N$ で homolog $0$ でない。$p$ と $q$ によって定まる $\partial C_{ij}$ の二つの一次元球の適当な一方 $\underline{R}$ をとり，$\underline{\tilde{A}_i} = F_1(A \cup R)$ とおくと $\tilde{A}_i$ は $N$ の一次元球面で，$N$ で homolog $0$ でない。しかし $A \cup R$ は $X$ の $1$ 次元球面であるから，$\tilde{A}_i$ は $M_1$ の proper な２次元球 $\underline{\tilde{C}_i}$ の境界であり，

$$\tilde{C}_i \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup \cdots \cup C_n) = \phi$$

として良い。$M_1 - (C_1 \cup \cdots \cup C_n)$ は連結であるから

$$M_1 - (C_1 \cup \cdots \cup C_{i-1} \cup \tilde{C}_i \cup C_{i+1} \cup \cdots \cup C_n)$$

も連結である。故に $\{C_1, \cdots, C_{i-1}, \tilde{C}_i, C_{i+1}, \cdots, C_n\}$ は $M_1$ の meridian disc の系であり，$\{A_1, \cdots, A_{i-1}, \tilde{A}_i, A_{i+1}, \cdots, A_n\}$ は $M_1$ の meridian 系である。$F_1^{-1}(G(T))$ は連結で，$F_1^{-1}(G(T)) - C_{ij}$ が連結でなく，$A$ が $F_1^{-1}(G(T)) - C_{ij}$ を分けていることより，$\partial C_{ij} - R$ は $F_1^{-1}(B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ と交わる。故に $A_i - F_1(R)$ は $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ と交わる。$\tilde{A}_i$ と $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ の交点数は $A_i$ と $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ の交点数より，$A_i - F_1(R)$ と $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ の交点数の分だけ少なくなる。$M^3$ の新しい Heegaard 分解として，

$$\tilde{T} = \{N \mid A_1, \cdots, A_{i-1}, \tilde{A}_i, A_{i+1}, \cdots A_n, B_1, \cdots, B_n\}$$

を選ぶと，明らかに

$$\#(\tilde{T}) < \#(T)$$

$$n(\tilde{T}) = n(T)$$

である。

<u>証明終り</u>

## §4 <u>判定の algorithm</u>

3次元閉多様体 $M_1^3$，$M_2^3$ の Heegaard 分解を $T_1$，$T_2$ とするとき，$T_1$ と $T_2$ の connected sum は自然に定義することができ，（§2の系3参照）それを <u>$T_1 \# T_2$</u> と書くことにする。もちろん $T_1 \# T_2$ は $M_1^3$ と $M_2^3$ の connected sum <u>$M_1^3 \# M_2^3$</u> の Heegaard 分解になっている。

<u>定義</u> Heegaard 分解 $T$ において，任意の $i=1,2$，$j=1,2,\cdots,n$ に対して，$F_1^{-1}(G(T))-C_{ij}$，$F_2^{-1}(G(T))-D_{ij}$ が連結ならば $T$ は <u>s-irreducible</u> であると呼ぶことにする。さらに $T$ がいくつかの s-irreducible な Heegaard 分解の connected sum となるとき，$T$ を <u>irreducible</u> であると呼ぶことにする。

<u>定理3</u> $M^3$ が 2-handle をもたない3次元閉多様体であれば，$M^3$ の irreducible な Heegaard 分解を作る algorithm が存在する。

<u>証明</u>　$M^3$ の勝手な Heegaard 分解 $T$ をとり，定理１と定理２を繰り返し用いて，genus がもっと小さい Heegaard 分解の connected sum に分けることと，meridian 系の交点数 $\#(T)$ を低くする algorithm を反復して，これ等の algorithm が進行できなくなるまで実施する。最後に irreducible な Heegaard 分解を得る。

<u>証明終り</u>

以上の algorithm が $S^3$ 判定の algorithm となるという保証はないがつぎの予想をたてている。

<u>予想</u>「$S^3$ の irreducible な Heegaard 分解は標準形だけである。」

この予想は genus ２の場合だけしか証明できていないが，もしも genus が一般の場合に正しければ，$S^3$ 判定の algorithm が存在することとなる。

[1] Haken. Wolfgang
Theorie der Normalflächen
Acta Math. 105 (1961), 245~376

[2] Birman J. S. & Hilden H. M.
The homeomorphism problem for $S^3$.
Bulletin of the A.M.S. vol. 79 No. 5
(1973), 1006~1010

[3] 高橋 元男
種数2の Heegaard 分解についての Birman-Hilden の定理の別証
数理解析研究所講究録

[4] 本間 龍雄
Heegaard 分解と曲面上の曲線系について
数理解析研究所講究録